Selskabets Status.

Selskabets aarlige (og tilfældige) Indtægter . . . omtr.			6,079 Rd.
Udgivter til Selskabets Bestyrelse og dets Virksomhed, beregnede rundeligt efter Middelsummerne til	I.	1,200 Rd.	
	II.	3,000 —	
			4,200 —
Til Understøttelse til videnskabelige Foretagender og tilfældige Udgivter haves derfor omtrent			1,879 —

Disse to Posters Middelsum for 1842-51 er 1074 Rd. + 176 Rd = 1250 Rd.; for 1852-56 er 1215 Rd. + 228 Rd. = 1443 Rd.
Udgiften i 1857 var 331 Rd. 87 ß.

Paa Budgettdt er opført.	1,356 —
Altsaa til Disposition omtrent	523 Rd.

Herr Geheime-Etatsraad *Andræ* meddeelte derpaa følgende Afhandling:

Om Beregningen af Brede, Længde og Azimuth paa Sphæroiden.

Der gives neppe noget Problem, som i den høiere Geodæsie indtager en vigtigere Plads end det, der beskjæftiger sig med Overførelsen af Breden, Længden og Azimuthet fra Punkt til Punkt paa den sphæroidiske Jordoverflade. Ved den successive Udførelse af de herhen hørende Beregninger fremtræde umiddelbart som Problemets Givne: den geodætiske Brede og Længde for et bestemt Udgangspunkt tilligemed Længden og Azimuthet for en bestemt fra dette Punkt udgaaende Linie paa Klodens Overflade, og det er nu den foreliggende Opgaves Gjenstand at vise, hvorledes man af disse Størrelser kan finde saavel Breden og Længden for Liniens andet Endepunkt, som det Azimuth, der bestemmer dens Retning i dette Punkt. Da Klodens Overflade tilhører et Omdreiningslegeme indsees det let, at Udgangspunktets geodætiske Længde ikke kan spille nogen Rolle ved Formlernes Dannelse. Problemets Givne kunne derfor reduceres til trende Størrelser: Udgangspunktets Brede og den forbindende Linies Længde og Azimuth, ligesom de søgte Størrelser, foruden Azimuthet i Liniens andet Endepunkt, naturligst kunne antages at være selve de geodætiske Brede- og Længde-Differentser mellem begge Liniens Endepunkter.

Den levende Interesse, som fra Slutningen af forrige Aarhundrede og indtil vore Dage er bleven skjænket den høiere Geodæsie, og som har bevæget vor Tids største Mathematikere og Astronomer til at underkaste denne Videnskabs vigtigere Problemer en omhyggelig Bearbeidelse, maa naturligviis ogsaa have fremkaldt mangfoldige Løsninger af den berørte Opgave. Blandt den Række af Forfattere, der her kunde være at anføre, skal jeg dog blot i Forbigaaende nævne tvende, *Puissant* og *Bessel*, idet jeg forøvrigt indskrænker mig til særligt at fremhæve den Bearbeidelse af Problemet, der utvivlsomt indtager den meest fremragende Plads. *Gauss*, hvis Arbeider i flere Retninger maae tillægges en saa afgjørende Betydning for den høiere Geodæsie, har nemlig ogsaa gjentagende, og som det synes med en vis Forkjærlighed beskjæftiget sig netop med dette Problem, som han har gjort til Gjenstand for tvende selvstændige Afhandlinger, der först ere blevne offentliggjorte i 2det og 3die Bind af Göttinger-Videnskabernes-Selskabs Skrifter. Disse Afhandlinger give tvende uafhængige, med en ligesaa stor Elegants som Skarphed gjennemførte, fuldstændige Løsninger af Opgaven, og denne Dobbelthed i Behandlingen er vistnok ikke tilfældig, men begrundet med Nødvendighed i de eiendommelige Forhold, hvorunder det almindelige sphæroidiske Problem fremtræder i den høiere Geodæsie. Deels ere nemlig de Formlerne indtrædende Afstande mellem directe forbundne Punkter paa Klodens Overflade stedse i den geodætiske Praxis af en saa ringe Størrelse, sammenlignede med Klodens Axer, at de høiere Potentser af disse Afstande, som i Formlerne forekomme dividerede med tilsvarende Potentser af Axerne, meget hurtigt gaae over til at være fuldkommen forsvindende, og deels er selve Sphæroidens Afvigelse fra Kugleformen af en saa forholdsviis ringe Betydning, at Maalet for denne Afvigelse, Aplatissementet eller Quadratet paa Excentriciteten, bliver en Størrelse, der ganske maa sættes i Klasse med Punkternes indbyrdes Afstande. Medens den første Omstændighed, for sig betragtet, medfører, at alle Rækker ordnede efter stigende Potentser af Afstandene blive rask convergerende og ved Benyttelsen kunne indskrænkes til ganske faa Led, saa bevirker den sidste og fremfor Alt begge i Forening, at Opgaven, om den end ikke ligefrem kan betragtes som sphærisk, dog bevarer et saa nær beslægtet Præg, at den paa forskjellige Maader med større eller mindre Lethed vil kunne reduceres til en saadan. Der gives derfor stedse ved Behandlingen to Veie, paa hvilke der vil kunne slaaes ind, idet man enten kan søge en Reduction af den antydede Art, eller directe kan gaae over til den strenge sphæroidiske Løsning, og det er ogsaa disse tvende Veie, som begge ere blevne fulgte af *Gauss*. Den første af de nævnte Afhandlinger viser saaledes Bestemmelsen af en Kugle, paa hvilken den conforme Afbildning af den sphæroidiske Overflade, saalænge denne Afbildning ikke fjerner sig ud over visse Afstande fra en given Parallel, er saa nøie sammenfaldende med det afbildede Triangelsystem, at alle Vinkler og Sider uden mærkelig Afvigelse kunne betragtes som overførte med uforandret Størrelse fra Sphæroiden til Kuglen, idet tillige de geodætiske Linier, som paa Kloden forbinde Triangelpunkterne, blive gjengivne ved Storcirkler mellem de tilsvarende Punkter paa Kuglen. Det hele Triangelsystem kan saaledes beregnes som et umiddelbart givet sphærisk, og det er da let, naar den sphæriske Beregning er tilendebragt, at føre de ved deres Brede og Længde paa Kuglen bestemte Punkter tilbage paa Sphæroiden, da Formlerne, der udtrykke Forbindelsen mellem Afbildningen og det Afbildede, kunne gives en for Overførelsen særdeles beqvem Form. Uagtet den saaledes erholdte Løsning af Problemet er i høieste Grad sindrig, og uagtet det maa erkjendes, at Regningen kun bliver lidet besværlig, saa feiler man dog sikkert ikke ved at antage, at denne Behandling af de geodætiske Triangulationer, der hidtil saavidt mig bekjendt kun er bleven benyttet af *Gauss*, neppe nogensinde vil faae en udstrakt Anvendelse, og det saa meget mindre som *Gauss* selv i den anden af de citerede Afhandlinger har viist, at den directe Beregning paa Sphæroiden kan foretages ved Hjælp af Formler, der i det Væsentlige ere ligesaa simple som de tilsvarende sphæriske. Ved disse Formler, hvis Skarphed endogsaa gaaer ud over alle de Fordringer, den geodætiske Praxis kan opstille, kunde det nu vel synes, at Alt var bleven opnaaet, hvad der fornuftigviis lod sig opnaae, og at saaledes alle fremtidige Bearbeidelser af Opgaven maatte blive at betragte som overflødige. Det forekommer mig imidlertid dog, at der endnu selv ved denne Løsning ere Ulemper, som det kunde være ønskeligt at søge fjernede. Først og fremmest turde det maaskee bemærkes, at Løsningen er indirecte og fordrer en flere Gange gjentaget Regning forinden man kommer til staaende og endelige Resultater, men det bør da herved ogsaa fremhæves, at Regningen er simpel og let kan gives en for den praktiske Regner saa beqvem Form, at Ulempen bliver mindre følelig. Af større Betydning er derimod vistnok den Omstændighed, at den hele Udvikling, der tjener til Formlernes Begrundelse, selv i den elegante og concise Form, som *Gauss* har formaaet at give den, dog er af saadan Beskaffenhed og Omfang, at det bliver i høieste Grad vanskeligt, eller maaskee rettere umuligt, at optage den i de almindelige Fremstillinger af den høiere Geodæsie, hvor Behandlingen af Videnskabens forskjellige Problemer maa holdes indenfor snevrere Grændser. Det kan derfor neppe være uden Interesse nærmere at undersøge, hvorvidt Opgaven ikke i og for sig maatte være af en mere elementær Natur, der gjør det muligt at give Løsningen paa en simplere Maade med Bibehold af en idetmindste ligesaa let Regning og med fuldstændig Bevarelse af samme Skarphed i Bestemmelsen af de udledede Størrelser.

Den saaledes betegnede Undersøgelse er Gjenstand for nærværende Afhandling.

§ 1.

Ved enhver mathematisk Behandling af Problemer, der angaae empiriske Størrelser, fordrer først og fremmest det Spørgsmaal en Besvarelse, med hvilken Nøiagtighed det overhovedet under de tilstedeværende Forhold er nødvendigt at fremstille Problemets forskjellige Størrelser, saavel de givne som de af disse udledede. Det er nemlig umiddelbart indlysende, at der stedse ved saadanne Størrelsers numeriske Angivelse kun er et begrændset, som oftest endog kun et meget indskrænket Antal af Ziffre, der kunne tillægges virkelig Betydning, og den hensynsløse Tilføielse af intetsigende Tal er ikke blot at betragte som overflødig, men bærer tillige Vidnesbyrd om en Mangel paa klar Opfattelse af den foreliggende Opgaves Natur. Ikke mindre urigtigt maa det da ogsaa erkjendes at være, naar man ved Regningens Udførelse anvender en Fremgangsmaade, hvis Omstændelighed kun kan søge sit Forsvar i Bestræbelsen efter at bestemme saadanne Ziffre, der selv ere uden Betydning, og det er endelig atter en Feil af lignende Beskaffenhed, naar man ved Formlernes Udledelse forsømmer at benytte de Lettelser, som stedse tilbyde sig, hvor Functioner af en mere compliceret Form kunne ombyttes med andre og simplere, fordi Problemet forudsætter en vis snevrere Begrændsning, indenfor hvilken disse Functioners Forskjel er forsvindende. Det antydede Spørgsmaal, hvis Besvarelse bør yttre en saa afgjørende Indflydelse paa hele Behandlingen, hører imidlertid ikke til dem, der tilstede et aldeles bestemt og uimodsigeligt Svar, som kan bygges paa et strengt mathematisk Beviis. Det er tvertimod efter sin Beskaffenhed et saadant, der kun kan afgjøres ved et Skjøn, som stedse maa forudsætte en vis Vilkaarlighed. Hvor liden Betydning der maa tillægges den heraf flydende Usikkerhed turde imidlertid fremgaae af de nedenstaaende Bemærkninger, der skulle tjene som Veiledning ved Spørgsmaalets Afgjørelse.

§ 2.

Lad V betegne en Størrelses sandsynligste Værdie, saaledes som den bestemmes ved en fuldkommen skarp Gjennemførelse af Regningen og en fuldkommen skarp Angivelse af dens Resultat, og lad V_1 betegne en approximativ Værdie for den samme Størrelse, idet Differentsen mellem disse Værdier, eller δ i Ligningen: $V = V_1 + \delta$, kun er forholdsviis ringe. Naar der da spørges om det Tab, som fremstaaer ved at ombytte V med V_1, saa kunde man først og fremmest ledes til en nærmere Undersøgelse af Forholdet mellem Sandsynlighederne p og p_1 for selve Værdierne V og V_1. Betegnes med r den til Udledelsen af V knyttede sandsynlige Feil, og med ϱ Constanten 0,4769.., saa haves som bekjendt:

$$\frac{p_1}{p} = e^{-\varrho^2\left(\frac{\delta}{r}\right)^2}$$

og er nu $\frac{\delta}{r}$ en lille Størrelse kan man med tilstrækkelig Nøiagtighed sætte:

$$\frac{p_1}{p} = 1 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{r}\right)^2$$

hvilket Udtryk i hvert Fald viser hvor hurtigt Forholdet for aftagende Værdier af $\frac{\delta}{r}$ gaaer over til at falde sammen med Eenheden. Men en nærmere Overveielse bringer dog let til at indsee, at man ikke ved at følge denne Vei kan erholde nogen klar Forestilling om Betydningen af den omhandlede Approximation. At Værdien V er den absolut fordeelagtigste er nemlig ikke nogen umiddelbar Følge af den større Sandsynlighed, der tilkommer den ligeoverfor alle andre Værdier af den tilsvarende Størrelse; thi vel er det saa, at Beskaffenheden af den almindelige Feillov nødvendigviis medfører, at den sandsynligste Værdie her tillige bliver den fordeelagtigste, men det er dog saa langt fra, at disse to Egenskaber kunne opfattes som identiske, at man endog med Lethed formaaer at danne utallige Feillove, hvor de fremtræde adskilte, og det selv saaledes adskilte, at der i denne Henseende indtræder et fuldstændigt Modsætningsforhold, idet den fordeelagtigste Værdie bliver den mindst sandsynlige af alle. Naar Værdien V bør foretrækkes for enhver anden, saa beroer dette egentlig alene paa den Omstændighed, at der til denne Værdie er knyttet den mindste Middelfeil, hvilket atter ved den almindelige Feillov kan udtrykkes saaledes, at den af alle Værdier medfører størst Sandsynlighed for den sande Værdies Beliggenhed indenfor hvilkesomhelst givne Grændser. Med andre Ord, naar f er en vilkaarlig Grændse, P Sandsynligheden for den sande Værdies Beliggenhed mellem $V - f$ og $V + f$, og ligeledes P_1 Sandsynligheden for dens Beliggenhed mellem $V_1 - f$ og $V_1 + f$, saa vil Værdien V være charakteriseret som den fordeelagtigste derved, at den gjør P til et absolut Maximum sammenlignet med alle Værdier af P_1.

Som bekjendt har man:

$$P = \int_0^{\varrho\left(\frac{f}{r}\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

og ligeledes erholdes:

$$P_1 = \int_0^{\varrho\left(\frac{f-\delta}{r}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2} dt + \int_0^{\varrho\left(\frac{f+\delta}{r}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2} dt,$$

hvoraf: $$P - P_1 = \int_{\varrho\left(\frac{f-\delta}{r}\right)}^{\varrho\left(\frac{f}{r}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt - \int_{\varrho\left(\frac{f}{r}\right)}^{\varrho\left(\frac{f+\delta}{r}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt,$$

hvilket ogsaa umiddelbart viser, at denne Differents stedse er en positiv Størrelse. En nøiere Undersøgelse af $P - P_1$, der almindeligt fremstiller Tabet, som fremstaaer ved Ombytningen af V med V_1, viser nu let, at dette Tab stedse aftager med aftagende Værdier af δ. Saalænge δ er større end r bliver det dog meget kjendeligt; men gaaer δ ned under r formindskes det hurtigt, og naar $\frac{\delta}{r}$ kun er en lille Brøk bliver det i praktisk Henseende uden al Betydning, hvorom man maaskee bedst overtydes ved at kaste et Blik paa nedenstaaende Tavle, som for forskjellige Værdier af f og for $\frac{\delta}{r} = \frac{1}{5}$ giver saavel P som P_1 saaledes som de findes ved at benytte en med 3 Decimaler udført Beregning af Værdierne for Integralet: $\int_0^{\varrho\left(\frac{f}{r}\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$.

	P	P_1	$P-P_1$
$f=r$	0,500	0,497	0,003
$f=2r$	0,823	0,819	0,004
$f=3r$	0,957	0,955	0,002
$f=4r$	0,993	0,993	0,000
$f=5r$	0,999	0,999	0,000

Kun ved de lavere Grændser, hvor Sandsynligheden for en Indesluttten af den sande Værdie endnu ikke er meget stor, fremtræder en ubetydelig, men for Praxis vistnok aldeles umærkelig Forskjel mellem P og P_1, der for høiere Grændser blive fuldkommen identiske. Heraf synes da at følge, at en Ombytten af V med V_1 ved Behandlingen af empiriske Størrelser stedse maa betragtes som fuldkommen tilladelig, naar kun δ bliver lille i Forhold til r, eller i hvert Fald mindre end $\frac{1}{5}r$, et Resultat, der ogsaa bekræftes ved den directe Sammenligning af de til V og V_1 svarende Middelfeil. Betegnes disse nemlig med m og m_1 haves som bekjendt:

$$\frac{m_1}{m} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 = 1 + \varrho^2\left(\frac{\delta}{r}\right)^2,$$

hvilket viser, at Forskjellen er uden Betydning, naar δ synker ned under den angivne Grændse.

§ 3.

Bestemmelsen af de forskjellige i Problemet indtrædende Størrelsers sandsynlige Feil beroer væsentligt paa Bestemmelsen af denne Feil for Vinkelmaalingen mellem terrestriske Gjenstande og for den deraf flydende Fastlæggelse af Triangelsidernes Azimuther. Uden at gaae ind paa en nærmere Undersøgelse af de mangfoldige Forhold, der komme i Betragtning ved denne Art af Iagttagelser, kunne vi her indskrænke os til den almindelige Bemærkning, at det neppe nogensinde, selv ved Benyttelsen af de bedste Instrumenter og ved Anvendelsen af den største Omhu, vil være muligt i de endelige Værdier af Trianglernes Vinkler eller af Differentserne mellem Sidernes Azimuther at undgaae sandsynlige Feil paa $\frac{1}{3}$ til $\frac{1}{2}$ Secund. I en Triangel, hvis Form er nogenlunde gunstig, vil den umiddelbart heraf flydende Feil paa de beregnede Sidelængder kunne anslaaes til $\frac{1}{400000}$, hvilket atter for Sider paa 100000 til 200000 Fod giver lineære Feil paa $2\frac{1}{2}$ til 5 Decimaltommer, og en lignende Usikkerhed maa da ogsaa fremstaae ved Bestemmelsen af Brede og Længdedifferentserne, hvor Vinklernes Feil combineres med Sidernes. Skal Nøiagtigheden i den definitive Angivelse af Azimuther, Breder og Længder strengt afpasses efter disse Bestemmelser af Feilene i hver Trinangel for sig, saa ledes man til den almindelige Regel, at Azimutherne kunne afrundes i Tiendedele, Brederne og Længderne derimod i Tusindedele af Secundet, for at erholde den nødvendige, men da ogsaa fuldkommen tilstrækkelige Skarphed. Erindres det nemlig, at Tusindedele af Secundet ved geodætiske Positioner paa det nærmeste svare til Tommer, saa bliver δ i det høieste $\frac{1}{20}$ Secund for Azimutherne og $\frac{1}{2}$ Tomme for Brederne og Længderne, altsaa i begge Tilfælde mellem $\frac{1}{5}$ til $\frac{1}{10}$ af r. Herved udelukkes det imidlertid ikke, at man ved Udførelsen af Beregningerne, for at sikkre sig mod en fortsat Ophoben af mindre Feil, kan gjøre rettest i at bevare endnu eet Ziffer, og saaledes anføre Azimutherne med 2, Brede og Længdedifferentserne med 4 Decimaler; men det bør da aldrig tabes af Sigte, at Eenheder af sidste Orden ikke i og for sig kunne tillægges nogen virkelig Betydning.

Mod Rigtigheden af den ovenfor givne Regel kunde der nu vistnok gjøres den Indvending, at hverken de virkelige i Formlerne indtrædende Azimuther, eller de relative Positioner i Triangelnettet som Hele betragtet, paa nogen Maade lade sig bestemme med den her forudsatte Skarphed. Feilen paa et absolut Azimuth vil saalades aabenbart være Productet, ikke blot af den fra Vinkelmaalingen i det enkelte Punkt hidrørende Feil, men ogsaa af alle de mangfoldige andre, der knytte sig til samtlige Vinkler, gjennem hvilke det er bleven overført fra den Side, hvis Retning mod Meridianen har været Gjenstand for en directe Bestemmelse, som atter selv er underkastet en Feil, der ligeledes bliver at medregne. Og hvad de relative Positioner angaae, saa er det indlysende, at ogsaa en tilsvarende Ophoben af Feil maa fremstaae ved deres Udledelse gjennem mange forskjellige Triangler, idet tillige Triangelsidernes Usikkerhed uafbrudt voxer, ikke saa meget ved selve Feilen paa den maalte Grundlinie, som ved Maalets Overførelse gjennem en ofte meget lang Række af Triangler. Men uagtet det som Følge heraf maa erkjendes, at sandsynlige Feil paa 1 à 2 Secunder ved Azimutherne, paa $\frac{1}{100000}$ ved Sidelængderne, og paa et Par Fod ved de relative Positioner, ere langt hyppigere end de ved Regelens Udledelse betragtede, saa hviler den berørte Indvending dog kun paa en let efterviselig Misforstaaelse af Beregningernes rette Betydning. Det maa nemlig ikke oversees, at Punkternes geodætiske Positioner ikke blot have til Formaal at angive deres absolute Plads paa Klodens Overflade, men tillige, og fremfor Alt, deres relative Beliggenhed indbyrdes, og denne sidste da ogsaa med hele den Skarphed, som

Iagttagelserne tilstede. Ligesom nu hver Triangel for sig betragtet, med Hensyn til dens Form, er fuldkommen bestemt ved dens Vinkler alene, saaledes maa ogsaa den Fordring fastholdes, at Skarpheden i Positionernes Bestemmelse bliver tilstrækkelig for Gjengivelsen af denne Form med en Nøiagtighed, der er fuldkommen uafhængig af den fra Maalets Overførelse og fra Orienteringen af Siderne hidrørende Usikkerhed i Trianglens Størrelse og Beliggenhed mod andre Punkter paa Klodens Overflade. *Gauss* har ogsaa fremsat denne Fordring paa en anden og ret heldig Maade ved at udtale, at Beregningens Resultater stedse bør angives saaledes, at de omvendt kunne benyttes til at reproducere selve Iagttagelserne med den for disse givne Nøiagtighed.

§ 4.

Naar det først er blevet afgjort, hvorledes de forskjellige Størrelser skulle angives, saa vil da ogsaa derved være bestemt, med hvilken Skarphed Beregningen i det Hele bør gjennemføres. Det Spørgsmaal, som maa tillægges størst Vægt, angaaer Valget af passende Logarithmetavler. Til Afstande paa 100000 indtil 200000 Fod svare Brededifferentser, der i det Høieste kunne stige til 2000 Secunder, men som oftest ville være langt under denne Grændse. Uagtet Længdedifferentserne nu vel kunne omfatte et noget større Antal af Secunder, saa fremgaaer det dog allerede heraf, at Tavler med 7 Decimalziffre under alle Omstændigheder maa ansees tilstrækkelige ved Beregningens numeriske Udførelse, forudsat naturligviis, at Formlerne ere dannede paa en hensigtsmæssig Maade. Den simple Bemærkning, at allerede den sandsynlige Feil paa Afstanden, der, udtrykt ved sit Forhold til den paagjældende Størrelse, stedse kun er en Deel af den tilsvarende Feil paa Brede- og Længde-Differentsen, maa kunne anslaaes til $\frac{1}{400000}$, medens Eenheden i Logarithmens 7de Decimalziffer svarer til $\frac{1}{4300000}$ af den ved Logarithmen bestemte Størrelse, turde maaskee allerklarest vise de syvziffrede Tavlers fuldkomne Tilstrækkelighed, hvilken det saa meget mere er nødvendigt stærkt at fremhæve, som der netop med Hensyn til dette Punkt hersker en ikke ringe Usikkerhed hos Geodæterne. Det er nemlig ingenlunde sjeldent i geodætiske Arbeider at finde otteziffrede, eller vel endog fleerziffrede Logarithmer anvendte, og selv Forfattere som *Bessel* have brugt en saadan Fremgangsmaade, som det blandt andet kan sees af det berømte Værk »Die Gradmessung in Ostpreussen«, hvor samtlige Triangler ere beregnede med otteziffrede Logarithmer, tagne ud af tiziffrede Tavler.

§ 5.

Det staaer endnu tilbage at undersøge hvilke Størrelser der kunne bortkastes ved Problemets mathematiske Behandling, og det bliver derfor nødvendigt noget nærmere at betragte Størrelsernes Henførelse til forskjellige Ordener og disses omtrentlige Bestemmelse. Da Triangelsidernes Længde næsten stedse vil ligge mellem 100000 og 200000 Fod, og som oftest langt nærmere ved den første end ved den sidste af disse Grændser, saa vil en Sides Forhold til en af Klodens Axer, eller til en anden Linie af samme Klasse, gjennemsnitsviis kunne anslaaes til $\frac{1}{140}$ eller $\frac{1}{150}$, altsaa netop til samme Størrelse som Qvadratet af Klodens Excentricitet. Men uagtet man saaledes vel med nogen Ret kunde betragte $\frac{1}{150}$ som det almindelige Maal for en Størrelse af 1ste Orden, saa foretrække vi dog til ydermere Sikkerhed at sætte dette endeel større, eller $= \frac{1}{100}$, hvorved da opnaaes, at Værdien kun i ganske enkelte Tilfælde, og da neppe betydeligt, vil kunne overskrides. Størrelser af 2den, 3die, eller n^{te} Orden blive som Følge heraf angivne ved: $\left(\frac{1}{100}\right)^2$, $\left(\frac{1}{100}\right)^3$ eller $\left(\frac{1}{100}\right)^n$, ligesom Forholdet mellem en Størrelse af n^{te} og en Størrelse af 1ste Orden almindeligt vil være udtrykt ved $\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$. Ligeoverfor Sidelængder, eller for Brede- og Længde-Differentser, der alle ere af 1ste Orden, maae derfor Størrelser af 5te Orden stedse betragtes som fuldkomment forsvindende, da Forholdet her bliver $\frac{1}{1000000000}$, altsaa flere Hundrede Gange mindre end de tilsvarende sandsynlige Feil. Mere tvivlsomt stiller Sagen sig med Hensyn til Størrelser af 4de Orden, hvor Forholdet i Regelen kun er lidet mindre end selve Feilene. *Gauss*, der vistnok driver Skarpheden til de yderste Grændser, bortkaster i Formlerne alle Størrelser af 5te og høiere Ordener, men bevarer til Gjengjæld alle Led af 4de Orden. Rigtigst turde det vel være ved Størrelser af 4de Orden, hver Gang at gjøre Spørgsmaalet afhængigt af en nærmere Undersøgelse, thi det maa jo vel erindres, at de ovenfor fastsatte Maal kun give en almindelig Veiledning for Bedømmelsen, og at det meget ofte vil findes, at enkelte Led af en vis Orden have Coefficienter, der ere saa smaae, at Størrelserne selv synke dybt ned under det almindelige Overslag.

Da Azimutherne kun skulle angives med en Nøiagtighed, der er 100 Gange mindre end den, som fordres ved Brede- og Længde-Differentserne, maa naturligviis Alt, hvad der foran er sagt om Størrelser af 5te og 4de Orden, ved Azimuthernes Bestemmelse finde Anvendelse paa Størrelser af respective 4de og 3die Orden. Besynderligt nok synes denne Forskjel slet ikke at være blevet bemærket af *Gauss*, som paa flere Steder angiver Azimutherne med 4 Decimaler.

§ 6.

Den Begrændsning, der er givet Problemet i Slutningen af foregaaende Paragraph, vil paa mangfoldige Maader kunne benyttes til at fjerne Vanskelighederne ved den foreliggende Opgaves Behandling, men forinden vi gaae over til at vise nogle af de Anvendelser, der først og naturligst frembyde sig, skulle vi her samlet give en Udsigt over de vigtigste i det Følgende forekommende Betegnelser:

Sphæroidens store og lille Halvaxe fremstilles ved a og b, Excentricitetens Qvadrat, eller Størrelsen: $1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, ved e^2.

λ er Breden for det vilkaarligt valgte Udgangspunkt A, og z er Azimuthet for det gjennem A lagte verticale Snit, der tillige indeholder Punktet B. Azimuthet forudsættes stedse regnet fra Syd gjennem Vest, Horizonten rundt.

K betegner Afstanden eller Længden af den elliptiske Bue mellem Punkterne A og B.

θ er Punkternes Længdedifferents og regnes positiv, naar B ligger Vest for A, hvorhos det tillige stedse forudsættes, naar ikke Andet udtrykkeligt siges, at Breden og Længden angives i Buelængde paa Cirkelen, hvis Radius er Eenheden.

N er Udgangspunktets Normal, begrændset af Polaraxen, R Krumningsradius for det ved Azimuthet z bestemte Verticalsnit, og M Meridianens Krumningsradius, begge for Punktet A.

De samme Bogstaver med et tilføiet Mærke ved Foden skulle bruges til at betegne de samme Størrelser bestemte for Punktet B. λ_1 er saaledes dette Punkts Brede, og z_1 er Azimuthet for et Verticalsnit gjennem B, der indeholder Punktet A, men som ikke falder sammen med det tidligere betragtede, da Normalerne i A og B ikke almindeligt kunne skjære hinanden. θ_1 er $= -\theta$. Betydningen af N_1, R_1 og M_1 er ingen Tvivl underkastet.

Δ er endelig Brededifferentsen mellem A og B, eller Størrelsen $\lambda_1 - \lambda$. Den er positiv, naar B ligger nordligere end A.

Alle øvrige Betegnelser skulle forklares ved deres Indførelse i Behandlingen.

§ 7.

I en Cirkel med r til Radius udtrykkes Forbindelsen mellem Buen s og Chorden c, overeensstemmende med den bekjendte Rækkeudvikling for *arc.sin*, paa følgende Maade:

$$s = c + \frac{1}{24}\frac{c^3}{r^2} + \frac{3}{640}\frac{c^5}{r^4} + \ldots\ldots$$

men forudsættes c i Forhold til r at være af 1ste Orden, bliver 3die Led allerede en Størrelse af 5te Orden, og Formlen reduceres saaledes i Geodæsien til:

$$s = c + \frac{1}{24}\frac{c^3}{r^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

For at give en klar Forestilling om den fuldstændige Nøiagtighed, der i praktisk Henseende kan tillægges dette Udtryk, skulle vi blot bemærke, at selv for Afstande af mere end 200000 Fod bliver det Bortkastede mindre end Tusindedelen af en Decimallinie.

Til samme Chorde c svarer i Cirkelen med Radius r_1 en Bue s_1, som bestemmes ved:

$$s_1 = c + \frac{1}{24}\frac{c^3}{r_1^2}.$$

Naar r_1 kun er lidet forskjellig fra r bliver ω i Udtrykket for Krumningerne:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}(1 + \omega)$$

en lille Størrelse, som vi her forudsætte at være af 1ste, eller af høiere Orden. Man faaer da stedse:

$$s_1 - s = \frac{c}{12}\left(\frac{c}{r}\right)^2 \omega \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Selv naar ω er af 1ste Orden bliver Differentsen saaledes kun en Størrelse af 4de Orden. Under Iagttagelse af den ved nærværende Undersøgelse givne Begrændsning forsvinder den derimod fuldstændigt, og man faaer: $s_1 = s$, naar ω bliver af 2den eller af høiere Orden.

§ 8.

Vi skulle nu kaste et Blik paa den sphæroidiske Jordoverflades Krumningsforhold. Som bekjendt har man:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{a}\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

og tillige:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\cos^2 z \cos^2 \lambda\right) \quad \dots \quad (4)$$

Af (4) sees umiddelbart, at Krumningen i ethvert Punkt erholder et relativt Minimum for $\cos z = 0$, det vil sige for det perpendiculært paa Meridianen førte Snit, hvor Krumningsradien falder sammen med Normalen. Naar Snittet, ved at dreies mod Nord eller mod Syd, fjerner sig mere og mere fra denne Retning, vil Krumningen uafladeligt voxe indtil den opnaaer sit relative Maximum for $\cos^2 z = 1$, eller i selve Meridiansnittet, hvor: $\frac{1}{R} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{e^2\cos^2\lambda}{1-e^2}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{1-e^2\sin^2\lambda}{1-e^2}\right)$

eller $$\frac{1}{M} = \frac{1}{a}\,\frac{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}{1-e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Sammenlignes de til ligestore Chorder svarende Buelængder paa samtlige Krumningscirkler i et givet Punkt, saa vil i (2) den største Værdie for ω aabenbart svare til Forskjellen mellem Krumningens Maximum og Minimum, og følgelig blive $= \frac{e^2\cos^2\lambda}{1-e^2}$.

Saavel denne Værdie, som selve de ved (3) og (5) bestemte relative Minimal- og Maximal-Værdier, opnaae deres absolute Maxima ved Æqvator, hvor $\lambda = 0$ giver:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{a}; \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-e^2} \quad \text{og} \quad \omega = \frac{e^2}{1-e^2}.$$

Bevæger man sig fra Æqvator mod Polerne aftage stadigt baade mindste og største Krumning, men den sidste dog langt hurtigere end den første, saaledes at Forskjellen, eller Maalet for samme: ω, uafbrudt bliver mindre og mindre indtil den fuldstændigt forsvinder i Polerne, hvor $\frac{1}{N} = \frac{1}{M} = \frac{1}{a}\sqrt{1-e^2}$.

Den største Krumning, der overhovedet kan forekomme paa Jordoverfladen, findes altsaa i Æqvator, hvor Meridiansnittet, naar Led af høiere Ordener forbigaaes, giver $\frac{1}{M} = \frac{1}{a}(1+e^2)$, og den mindste ved Polerne, hvor et hvilketsomhelst Snit har Krumningen: $\frac{1}{a}(1-\frac{1}{2}e^2)$. For alle Klodens Krumningscirkler vil saaledes Forskjellen mellem de til samme Chorde svarende

Buelængder ikkun være en Størrelse af 4de Orden, der neppe kan tillægges praktisk Betydning. Henføres nemlig samtlige Buer til Æqvator, eller til Cirkelen med Radius a, saa vil den numeriske Værdie af ω, der selv bevæger sig mellem Grændserne: $-\frac{1}{2}e^2$ og $+e^2$, aldrig kunne overstige: $\frac{1}{150}$, hvilket atter, for $\frac{c}{a}=\frac{1}{100}$, giver $s_1-s=\frac{c}{18000000}$. Det bør imidlertid bemærkes, at ω gjennemløber alle Værdier fra 0 til $\frac{1}{150}$, naar Snittets Azimuth i eet og samme Punkt af Æqvator bevæger sig gjennem 90°, og det er saaledes langt mere Forskjel i Azimuth end Forskjel i Brede, der frembringer større Forandringer af Krumningen. Bevæger man sig i et givet Verticalsnit gjennem Afstande af 1ste Orden vil Krumningen endogsaa variere saa langsomt, at ω synker ned til en Størrelse af 2den Orden; men for nærmere at kunne belyse dette i flere Henseender mærkelige Forhold bliver det nødvendigt at udvikle det almindelige Udtryk for Krumningsradien i et hvilketsomhelst Punkt af et saadant Snit.

§ 9.

Lad ε^2 betegne Excentricitetens Qvadrat i den Ellipse, der fremstaaer ved at skjære Sphæroiden med en i Punktet A ved Azimuthet z fastlagt Verticalplan, og lad endvidere l og l_1 betegne de Vinkler, som Snittets Normaler, respective for Udgangspunktet og for Endepunktet af Buen S, frembringe ved deres Skjæringer med Ellipsens store Axe. Ifølge de bekjendte Udtryk for Ellipsens Krumningsradier vil man da have:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a_1}\,\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}{1-\varepsilon^2},$$

hvor a_1 betegner Ellipsens store Halvaxe. Naar R_s er Krumningsradien for Endepunktet af Buen S, faaes ligeledes:

$$\frac{1}{R_s}=\frac{1}{a_1}\,\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2 l_1)^{\frac{3}{2}}}{1-\varepsilon^2},$$

hvoraf:
$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R}\left(\frac{1-\varepsilon^2\sin^2 l_1}{1-\varepsilon^2\sin^2 l}\right)^{\frac{3}{2}},$$

og beholdes af Rækkeudviklingen kun Leddet af laveste Orden:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R}\left(1-\varepsilon^2(\sin^2 l_1 - \sin^2 l)\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{R}\left(1-\tfrac{3}{2}\varepsilon^2\sin(l_1+l)\sin(l_1-l)\right)$$

eller med lige Nøiagtighed, idet S forudsættes at være en Størrelse af 1ste Orden:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R}\left(1 \pm \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 . \frac{S}{R}\sin 2l\right), \; \ldots \ldots \quad (6)$$

hvor øverste Tegn svarer til $l_1 > l$, nederste til $l_1 < l$.

At ε^2 stedse er mindre end e^2 indsees let. Det betragtede Snits Ellipse er nemlig ligedannet med den Ellipse, der frembringes ved at skjære Kloden med en Parallelplan gjennem Centret; men denne sidste Ellipse har a til store Halvaxe, medens den lille Halvaxe aabenbart er større end b. Det er saaledes afgjort, at ω bestemt ved (6) for alle Krumningsradier i Buen S bliver en Størrelse af 2den eller af høiere Orden, og som Følge heraf ville ogsaa alle Buelængder, som paa de tilsvarende Krumningscirkler bestemmes ved Chorden til S, blive fuldkommen ligestore, saavel indbyrdes som med den til samme Chorde svarende Bue paa Udgangspunktets Krumningscirkel. Men heraf følger da atter, at selve den elliptiske Bue S er ligestor med enhver af disse Cirkelbuer, thi den er aabenbart større end den mindste og mindre end den største. Det samme gjælder da endelig ogsaa om den fra A til Endepunktet A_1 af Buen S dragne geodætiske Linie, der i hvert Fald er mindre end S, men større end Cirkelbuen, som svarer til den største Krumningsradius. Man ledes da saaledes til at opstille følgende, for den geodætiske Praxis i høi Grad mærkelige Sætning:

»Ere A og A_1 tvende paa den sphæroidiske Jordoverflade beliggende Punkter, hvis indbyrdes Afstand ikke overstiger en Størrelse af 1ste Orden, saa vil den geodætiske Linie mellem disse Punkter og de elliptiske Buer, som frembringes ved plane, i A eller A_1 normale, Snit gjennem Punkterne, være fuldkommen ligestore med den til Chorden AA_1 svarende Bue paa en hvilkensomhelst af Snittenes Krumningscirkler, idet Forskjellen mellem samtlige disse Størrelser i intet Tilfælde kan overstige en Størrelse af 5te Orden.«

Forestiller man sig endvidere fra A afsat nedefter paa Normalen N enhver af de forskjellige til Buen S hørende Krumningsradier, og beskrives fra de saaledes bestemte Punkter som Centrer og med de tilsvarende Radier et System af Cirkler, samtlige beliggende i den elliptiske Bues Plan, saa ville alle disse Cirkler aabenbart tangere Ellipsen i Udgangspunktet A, idet tillige nogle af dem ville gaae over, andre under Punktet A_1. Det er da indlysende, at der stedse maa gives een af disse Cirkler, som tillige indeholder selve Punktet A_1, og betegnes denne Cirkels Radius ved at tilføie Klammerne: [ ] om Mærket for Udgangspunktets Krumningsradius, altsaa her ved $[R]$, saa kommer man ogsaa til følgende ikke mindre mærkelige Sætning:

»Naar den elliptiske Buelængde S afsættes paa den ved $[R]$ bestemte Cirkelbue, der i A har fælles Tangent med S og altsaa samme Azimuth som S, saa falder Cirkelbuens Endepunkt nøiagtigt i A_1, eller i selve Endepunktet af den elliptiske Bue. Den relative Beliggenhed af Punkterne A og A_1 kan altsaa stedse bestemmes fuldkommen nøiagtigt ved den omhandlede Cirkelbue, hvis Azimuth og Længde ere identiske med de for S umiddelbart givne.«

Denne sidste Sætning indeholder den egentlige Nøgle til enhver simpel Løsning af det sphæroidiske Brede- og Længde-Problem. Det var let at finde selve Værdien for $[R]$ bestemt ved R, ε^2 og l, og naar man da atter i denne Værdie for ε^2 og l substituerede deres Udtryk i e^2, z og λ, vilde man erholde $[R]$ bestemt ved Problemets umiddelbart givne Størrelser; men denne Udvikling skulle vi dog forbigaae indtil videre, da den ikke finder Anvendelse paa den nærmest følgende Løsning, ved hvilken det er tilstrækkeligt at vide, at Forskjellen mellem $[R]$ og R kun kan være en Størrelse af 2den eller af høiere Orden.

§ 10.

Der gives endnu et Forhold paa den sphæroidiske Jordoverflade, som det, især med Hensyn til Azimuthernes Bestemmelse, er nødvendigt at gjøre til Gjenstand for en nærmere Undersøgelse. Vi have allerede forhen berørt, at de tvende gjennem Punkterne A og B lagte Planer, af hvilke den første er normal paa Overfladen i A, den anden i B, ikke almindeligt kunne falde sammen, da Normalerne i A og B ikke almindeligt kunne skjære hinanden. For at fremkalde et klart og tydeligt Billede ville vi for et Øieblik fastholde en speciel Beliggenhed af Punkterne og til Exempel forestille os Azimuthet z i 2den Qvadrant, eller Punktet B liggende Nordvest for A, λ_1 større end λ og $\varDelta$ positiv. Er nu F det Punkt af Polaraxen, hvori den skjæres af Normalen N, og F_1 det tilsvarende Punkt, hvori den skjæres af N_1, saa er det indlysende at den første Plan, der bestemmes ved Punkterne F, A og B, vil skjære den gjennem B gaaende Meridianplan i Linien BF, medens den anden Plan, der paa lignende Maade bestemmes ved F_1, B og A, skjærer Meridianplanen i Linien BF_1. Tænker man sig begge disse Linier: FB og $F_1 B$, forlængede op over Jordens Overflade, saa ville de i Forbindelse med Chorden BA bestemme en sphærisk Triangel, den samme som dannes ved de tvende Planer og Meridianplanen for B, der med største Lethed giver Forskjellen mellem de tvende Vinkler, hvorunder den nævnte Meridianplan skjæres af Planerne. Den ene af disse Vinkler er allerede angivet ved Azimuthet z_1 for Planen $F_1 BA$, og betegnes paa lignende Maade med z_2 den tilsvarende Skjæringsvinkel for Planen FAB, idet denne Vinkel ligesom z_1 regnes fra Syd gjennem Vest hele Horizonten rundt, saa ville i nærværende Tilfælde baade z_1 og z_2 være beliggende i 4de Qvadrant, og de 2 af den sphæriske Triangels Vinkler, der have deres Toppunkter i Forlængelserne af $F_1 B$ og FB, aabenbart være bestemte ved: $(360^\circ - z_1)$ og $(z_2 - 180^\circ)$. Den mellem disse Vinkler liggende Side, eller Vinklen mellem BF_1 og BF, betegne vi med ψ, og den ligeoverfor Vinkelen $(z_2 - 180^\circ)$ liggende Side med $(90^\circ + h)$, da den kun vil være lidet større end Qvadranten, eftersom den dannes ved Chorden BA og Forlængelsen af $F_1 B$, og h saaledes i Stationen B er Horizontaldepressionen for Punktet A. Den sphæriske Triangel giver da umiddelbart:

$$\cot(90^\circ + h)\sin\psi = \cot(z_2 - 180^\circ)\sin(360^\circ - z_1) + \cos\psi\cos(360^\circ - z_1)$$

eller: $$-\operatorname{tang} h \sin\psi = -\cot z_2 \sin z_1 + \cos\psi \cos z_1$$

og sættes: $z_2 = z_1 + \delta$, idet δ er en meget lille Størrelse, hvis høiere Potentser bortkastes:

$$\delta = -\operatorname{tang} h \sin\psi \sin z_1 + \cos z_1 \sin z_1 (1 - \cos\psi) \quad . \; . \; . \; (7)$$

Størrelsen h bestemmes let, naar man indfører den i foregaaende Paragraph omhandlede Cirkelbue istedetfor den elliptiske Bue, der fremstaaer ved at skjære Kloden med Planen $F_1 BA$, og som vi til Forskjel fra det ved Planen FAB bestemte elliptiske Snit, der angives ved $AA_1 B$, fremtidigt ville betegne med $BB_1 A$. Radius for denne Cirkel, der tangerer $BB_1 A$ i Punktet B, vil ifølge den tidligere valgte Betegnelse være: $[R_1]$, og man har da umiddelbart:

$$h = \frac{K}{2[R_1]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; [8]$$

hvilken viser at h er en Størrelse af 1ste Orden.

Vinkelen ψ findes ved Hjælp af Trianglen BFF_1, hvor $BF_1 = N_1$ og den i F_1 liggende Vinkel $= 90^\circ - \lambda_1$. Denne Triangel giver nemlig:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{FF_1 \cos\lambda_1}{N_1 - FF_1 \sin\lambda_1} = \frac{FF_1 \cos\lambda_1}{N_1}\left\{1 + \frac{FF_1 \sin\lambda_1}{N_1} + \ldots\right\}$$

Men FF_1 er som bekjendt $= e^2(N_1 \sin\lambda_1 - N\sin\lambda)$,

følgelig: $$\frac{FF_1}{N_1} = e^2\left(\sin\lambda_1 - \frac{N}{N_1}\sin\lambda\right).$$

ψ er altsaa en Størrelse af 2den Orden og vil saaledes indtil Led af 3die Orden incl. være fremstillet ved

$$\psi = e^2 \cos\lambda_1 \left(\sin\lambda_1 - \frac{N}{N_1}\sin\lambda\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Men heraf følger da atter, at δ, bestemt ved (7), bliver en Størrelse af 3die Orden, og dens høiere Potentser, der ovenfor bortkastedes, vare saaledes uden al Betydning. Ved Udviklingen af (7) erholdes tillige:

$$\delta = -h\psi\sin z_1 + \tfrac{1}{2}\psi^2\cos z_1 \sin z_1 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

hvilket Udtryk bestemmer δ indtil Led af 4de Orden incl., og det behøver neppe at tilføies, at den forudsatte særlige Beliggenhed af Punkterne A og B ikke berøve Formlerne (9) og (10) deres almindelige Gyldighed; thi vel er Forholdet forskjelligt i de forskjellige Qvadranter, men det erkjendes let, at de hertil svarende Ændringer fremstaae af sig selv ved Tegnskifterne for $\sin z_1$, $\cos z_1$ og ψ.

Indskrænker man sig ved Bestemmelsen af δ til Leddene af 3die Orden, hvilket under alle Omstændigheder maa betragtes som fuldkomment tilladeligt, saa reduceres (10) til:

$$\delta = -h \,.\, \psi \sin z_1$$

og det er da tilstrækkeligt ved Udviklingen af Værdierne for h og ψ at bevare Leddene af respective 1ste og 2den Orden.

I (8) vil man saaledes først kunne ombytte $[R_1]$ med R_1, hvilket er eensbetydende med Bortkastelsen af et 3die Ordens Led, og dernæst R_1 med N_1, hvorved et Led af 2den Orden bortkastes, og man faaer da:

$$h = \frac{K}{2N_1}.$$

I (9) kan man paa lignende Maade sætte $\dfrac{N}{N_1} = 1$ og $\sin\lambda_1 = \sin\lambda + \varDelta \,.\, \cos\lambda$, hvilket giver:

$$\psi = e^2 \varDelta \,.\, \cos\lambda_1 \cos\lambda.$$

Man faaer følgelig:

$$\delta = -\tfrac{1}{2} e^2 \varDelta \frac{K}{N_1} \cos\lambda_1 \cos\lambda \sin z_1.$$

Det er bekjendt, og det vil i hvert Fald fremgaae af en følgende Paragraph, at man indtil Led af 1ste Orden har:

$$\lambda - \lambda_1 = -\frac{K}{N_1}\cos z_1\,, \quad \text{eller} \quad \varDelta = \frac{K}{N_1}\cos z_1\,;$$

altsaa: $$\delta = -\tfrac{1}{4}e^2\left(\frac{K}{N_1}\right)^2 \cos\lambda_1 \cos\lambda \sin 2z_1 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

δ er saaledes en meget lille Størrelse af 3die Orden, som fuldstændigt forsvinder, naar Snittets Retning falder sammen med Meridianen, eller med dens Perpendiculær, og som opnaaer sin største numeriske Værdie for Retninger, der halvere Qvadranterne og følgelig give $\sin 2z_1 = \pm 1$. Selv for Triangelsider af 200000 Fod vil denne Maximalværdie dog stedse være mindre end: $\dfrac{\cos\lambda_1 \cos\lambda}{6000000}$, en Størrelse, som for Danmark aldrig overstiger $\frac{1}{85}$ af eet Secund.

§ 11.

Værdien for δ, bestemt ved (11), angiver tillige Maalet for den Vinkel, som i Punktet B dannes af de elliptiske Buer: BB_1A og BA_1A, thi vel er $\delta = z_2 - z_1$ ikke strengt taget en Differents mellem disse Buers Azimuther, da z_2 ikke selv er noget Azimuth paa Sphæroiden, men Forskjellen er dog kun saa ringe, at den fuldstændigt forsvinder ved en Udvikling, som bortkaster Leddene af 4de Orden. I den retvinklede sphæriske Triangel, som dannes af Planen FBA i Forbindelse med Tangentplanen og Meridianplanen for Punktet B, er nemlig den i Meridianen liggende Cathete: $(90° - \psi)$, den anden Cathete: $(360° - z_3)$, naar z_3 betegner selve Azimuthet for BA_1A, og den ligeoverfor denne Cathete liggende Vinkel: $(360° - z_2)$. Man har saaledes:

$$\cos\psi = \cot(360° - z_2)\tang(360° - z_3),$$

eller: $$\tang z_3 = \tang z_2 \,.\, \cos\psi,$$

hvoraf ved Rækkeudvikling, idet $z_3 = z_2 + \xi$

$$\xi = -\tfrac{1}{4}\psi^2 \sin 2z_2\,,$$

hvilket ogsaa aabenbart viser, at Forskjellen kun er af 4de Orden. Vilde man paa liguende Maade søge et Udtryk for den af Buerne i Punktet A dannede Vinkel, saa behøvede man blot i (11) at ombytte N_1 med N og z_1 med z. Da der imidlertid mellem sin $2z_1$ og sin $2z$ kun er en Differents af 1ste Orden, og mellem N_1 og N endogsaa kun af 2den Orden, saa frembringer Ombytningen ingen Forandring i Værdien af δ, og Vinklerne B_1BA_1 og A_1AB_1 ere derfor, naar kun Led af 3die Orden tages i Betragtning, fuldkommen ligestore. Afstanden mellem Curverne AA_1B og AB_1B voxer naturligviis uafbrudt, naar man fjerner sig mere og mere fra A eller fra B henimod Midten af Buerne, hvor den opnaaer sit Maximum, og bliver da, naar Led af høiere Orden bortkastes, Halvdelen af den tilsvarende Afstand mellem Tangenterne for det fælleds Udgangspunkt A eller B. Betegnes denne største Afstand med d faaer man saaledes:

$$d = \tfrac{1}{4} \, . \, K\delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

en Størrelse, der selv voxer og aftager med δ. Den kan følgelig under ingen Omstændigheder overskride Værdien: $\frac{1}{16}e^2\left(\frac{K}{N_1}\right)^2 K\cos\lambda_1\cos\lambda$, der i Danmark for $K = 200000$ Fod stedse er mindre end *Tredieparten af en Decimallinie.*

Ved det ovenfor Udviklede kastes et klart Lys paa Betydningen af den Usikkerhed i Bestemmelsen af de geodætiske Trianglers Form, som er en nødvendig Følge af Klodens Excentricitet. Da man ved Iagttagelserne kun directe kan maale de af Triangelpunkternes Verticalplaner dannede Vinkler, og da Triangelsidernes Verticalplaner ere forskjellige i de forskjellige Stationer, saa fremtræde i Virkeligheden selve Trianglerne med dobbelte Sider, saaledes som det ogsaa er viist for Siden AB, der dannes af Curverne AA_1B og BB_1A. Det er for at fjerne denne Tvetydighed, at man har indført de geodætiske Linier, hvis Azimuther ikke strengt taget kunne betragtes som sammenfaldende med de directe bestemte. Forskjellen er imidlertid uden al praktisk Betydning, da man let kan godtgjøre, at den geodætiske Linie mellem Punkterne A og B stedse maa indespærres mellem Curverne AA_1B og BB_1A. Bevæger man sig nemlig fra A mod B, eller fra Syd mod Nord, paa den ved A og B bestemte geodætiske Linie, saa ville Liniens Osculationsplaner, der som bekjendt i alle Punkter ere normale paa den krumme Overflade, stedse skjære Polaraxen dybere og dybere, idet Skjæringspunktet continuerligt flytter sig fra F til F_1. Af tvende successive Osculationsplaner, der have et uendeligt lille Element af Curven tilfælleds, vil saaledes den paafølgende skjære Kloden i et Snit, der, med Undtagelse af Fælledselementet, ligger heelt Syden for det tilsvarende Snit, som er frembragt af den næstforegaaende. Det er da indlysende, at Curven stedse afviger mere og mere mod Syd, og at en geodætisk Linie, der i Udgangspunktet A har samme Azimuth som AA_1B, nødvendigviis gaaer sydligt forbi B. Den geodætiske Linie mellem A og B, der umuligt kan skjære AA_1B, maa derfor ligge heelt Nord for AA_1B. Men ganske paa samme Maade vilde man ved en Bevægelse fra Nord mod Syd, eller fra B mod A, bringes til at erkjende, at Curven uafladeligt bøies mere og mere mod Nord, og at den altsaa, for at kunne ramme A, maa ligge heelt Syd for BB_1A. Den Correction, der maa tilføies et observeret Azimuth for at henføre det til den geodætiske Linie gjennem det aflagte Punkt vil saaledes, stedse kun være en Deel af Vinkelen A_1AB_1, eller en Brøk af δ, og en nærmere Undersøgelse viser endogsaa let, at den indtil Led af 3die Orden incl. kan sættes $= \frac{1}{3}\,\delta$. Men denne Størrelse er aldeles forsvindende i Praxis. For Danmark vil den, selv under de ugunstigste Forhold og for Triangelsider paa 200000 Fod, dog aldrig kunne naae $\frac{1}{255}$ af Secundet. Det er saaledes med fuldkommen Ret, at Geodæterne ganske forsømme den og i Regelen kun betragte den geodætiske Linie som en, vistnok i flere Henseender hensigtsmæssig, theoretisk Fiction.

§ 12.

I det Foregaaende er nu Alt saaledes forberedet, at der ikke længere er nogen Vanskelighed ved at finde forskjellige simple Løsninger af det behandlede Problem. Vi skulle først gaae over til at vise dets Reduction ved Hjælp af Kuglen, eller dets Tilbageførelse paa en almindelig sphærisk trigonometrisk Opgave.

Af alle de forskjellige Kugler, om hvis Anvendelse der her kunde blive Tale, er der ingen, som mere naturligt frembyder sig, og ingen, som hyppigere er bleven benyttet, end den, hvis Radius er selve Normalen N. Denne Kugle, der gives fælleds Polaraxe med Kloden, har sit Centrum i F og osculerer Sphæroiden langs med Udgangspunktets Parallelkreds. Lad nu C være det Punkt af Parallelkredsen, hvor den gjennemskjæres af Meridianplanen for B, og lad endvidere B_2 betegne Skjæringspunktet paa Kuglen mellem den nævnte Meridianplan og Normalplanen FAB, eller, hvad der er det samme, Endepunktet af Radien FB. Storcirkelbuerne AB_2 og CB_2, der kun ere meget lidt forskjellige fra de tilsvarende sphæroidiske Buer AA_1B og CB, ville vi angive ved K_2 og L_2, idet vi tillige sætte $CB = L$ og betegne den sphæriske Brede for Punktet B_2 med λ_2, Differentsen $\lambda_2 - \lambda$ med Δ_2 og Længdedifferentsen mellem B_2 og A med θ_2. Rigtigheden af følgende Sætninger er da umiddelbart indlysende:

1) Paa Kuglen er Længdedifferentsen θ_2 identisk med den sphæroidiske Længdedifferents θ, da begge Flader have fælleds Meridianplaner.
2) Det sphæriske Azimuth i Punktet B_2 for Storcirkelbuen B_2A er identisk med den tidligere i § 10 betragtede Skjæringsvinkel z_2, og det sphæroidiske Azimuth z_1 er følgelig bestemt ved Ligningen: $z_1 = z_2 - \delta$.
3) Uagtet den sphæriske Brede λ_2 er væsentligt forskjellig fra den sphæroidiske λ_1, da Fladernes respective Normaler FB og F_1B indbyrdes danne Vinklen ψ (§ 10), saa vil dog den ene af disse Størrelser være ligefrem bestemt ved den anden, idet man deels har Ligningen $\lambda_1 = \lambda_2 + \psi$, hvoraf $\Delta = \Delta_2 + \psi$, og deels, hvad der er at foretrække, istedetfor directe at søge Δ, kan søge den samme

bestemmende Meridianbue L, hvis Forskjel fra $L_2 = N\Delta_2$ er en saa godt som forsvindende Størrelse.

Da man nu med største Lethed kan finde de sphæriske Størrelser: θ_2, z_2 og Δ_2, naar λ, z og K_2 ere givne, saa vil Problemets fuldstændige Løsning ved disse Sætninger være ført tilbage paa den nærmere Bestemmelse af Differentserne: $K_2 - K$ og $L_2 - L$.

§ 13.

For at finde $K_2 - K$ ville vi ombytte den elliptiske Bue AA_1B med Cirkelbuen, hvis Radius er $[R]$, og hvis Centrum ligger paa Normalen N i et Punkt G nærved F, men mellem F og A. Triangelen FGB giver umiddelbart:

$$FG \sin GFB = BG \sin GBF,$$

eller: $$\{N - [R]\} \sin\left(\frac{K_2}{N}\right) = [R] \sin\left(\frac{K}{[R]} - \frac{K_2}{N}\right).$$

Da $\{N - [R]\}$ og $\sin\left(\frac{K_2}{N}\right)$ ere Størrelser af 1ste Orden, maa $\sin\left(\frac{K}{[R]} - \frac{K_2}{N}\right)$ være en Størrelse af 2den Orden. Ved Rækkeudviklingen, fortsat indtil Leddene af 4de Orden incl., erholdes derfor:

$$\{N - [R]\}\frac{K_2}{N} - \tfrac{1}{6}\{N - [R]\}\left(\frac{K_2}{N}\right)^3 = K - [R]\frac{K_2}{N}$$

eller: $$K_2 - K = \tfrac{1}{6}\{N - [R]\}\left(\frac{K_2}{N}\right)^3 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Med Bevarelsen af den samme Nøiagtighed kan man her for K_2 og $[R]$ sætte K og R. Indføres tillige, ifølge (4), for: $1 - \frac{R}{N}$, Værdien: $e^2 \cos^2\lambda \cos^2 z$, bliver saaledes:

$$K_2 - K = \frac{e^2}{6}\left(\frac{K}{N}\right)^2 . K \cos^2\lambda \cos^2 z, \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

men denne Størrelse maa i praktisk Henseende betragtes som forsvindende, da allerede Factoren: $\frac{e^2}{6}\left(\frac{K}{N}\right)^2$, selv for $K = 200000$ Fod, bliver $= \frac{1}{9000000}$, eller mindre end $\frac{1}{20}$ af den sandsynlige Feil for K.

Det indsees let, at man i Ligning (13) kan ombytte K_2 og K med L_2 og L, naar man blot tillige sætter $[M]$ istedetfor $[R]$. Man har derfor ogsaa:

$$L_2 - L = \tfrac{1}{6}\left\{N - [M]\right\}\left(\frac{L_2}{N}\right)^3,$$

eller naar atter M sættes for $[M]$ og Værdien af: $1 - \dfrac{M}{N} = e^2 \cos^2\lambda$, indføres:

$$L_2 - L = \frac{e^2}{6}\left(\frac{L_2}{N}\right)^2 L_2 \cos^2\lambda \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (15)$$

Om denne Differents gjælder derfor Alt, hvad der ovenfor er anført om $K_2 - K$, og man kommer saaledes til det mærkelige Resultat, at den sphæriske Beregning af θ_2, z_2 og $\varDelta_2$ kan foretages med fuldkommen tilstrækkelig Nøiagtighed ved Hjælp af de umiddelbart givne Størrelser λ, z og K, idet man da tillige har:

$$\theta = \theta_2$$
$$z_1 = z_2 - \delta$$
$$L = L_2 = N\varDelta_2 .$$

For δ kan, ifølge § 10, indtil Led af 3die Orden incl. sættes: $-\frac{1}{2}\psi \dfrac{K}{N_1} \sin z_1$; men betegnes Kuglens Pol med P_2 vil den sphæriske Triangel $P_2 B_2 A$ give Ligningen:

$$\sin\theta_2 = -\sin\left(\frac{K_2}{N}\right)\frac{\sin z_2}{\cos\lambda} .$$

Indtil 3die Orden incl. har man følgelig ogsaa:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\psi \,.\, \theta \cos\lambda = \tfrac{1}{2}(\varDelta - \varDelta_2)\,\theta \cos\lambda \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (16)$$

For L haves ligeledes indtil 4de Orden incl. den bekjendte Ligning:

$$L = M_m \varDelta + \tfrac{1}{8} a \cos 2\lambda \,.\, e^2 \varDelta^3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (17)$$

idet M_m betegner Meridianens Krumningsradius for Middelbreden $\lambda_m = \lambda + \dfrac{\varDelta}{2}$.

Men (17) kan ogsaa skrives:

$$L = M_m \varDelta\left(1 + \frac{e^2}{8}\varDelta^2 \cos 2\lambda\right), \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (18)$$

hvor det sidste Led ganske maa sættes i Klasse med Størrelserne: $K_2 - K$ og $L_2 - L$. Man har derfor stedse med tilstrækkelig Nøiagtighed:

$$\varDelta = \frac{L}{M_m} = \varDelta_2 \frac{N}{M_m},$$

og den definitive Løsning af Problemet gives da ved følgende Ligninger:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= \varDelta_2 \frac{N}{M_m} \\ \theta &= \theta_2 \\ z_1 &= z_2 - \tfrac{1}{2}(\varDelta - \varDelta_2)\,\theta \cos\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (19)$$

Puissant har ved Benyttelsen af den samme Kugle erholdt fuldkomment lignende Resultater, men han fælder en urigtig Dom om Formlernes Nøiagtighed, naar han antager, at denne kun gaaer indtil Leddene af 3die Orden incl. Den directe Sammenligning mellem Kuglen og Sphæroiden er nemlig hos denne Forfatter støttet paa et svævende og utilfredsstillende Raisonnement, der kun gjør Formlernes Rigtighed plausibel, hvorimod det egentlige Beviis er søgt gjennem en Rækkeudvikling indtil 3die Ordens Leddene, som da vises at falde sammen med den tilsvarende Rækkeudvikling for den strænge sphæroidisk-trigonometriske Løsning Den her givne Udvikling godtgjør imidlertid, at Nøiagtigheden gaaer endeel videre, idet man selv af 4de Ordens Leddene kun bortkaster nogle ganske enkelte, der i praktik Henseende ere uden al Betydning, medens de væsentligere Led af denne Orden ligge skjulte i selve den sphæriske Beregning af Størrelserne. Den af *Gauss* givne Løsning driver dermod Nøiagtigheden endnu yderligere, ved uden Undtagelse at bevare alle Led af 4de Orden, men lægger man overhovedet Vægt paa en saadan Skarphed, der kun synes at have en vis theoretisk Interesse, saa vil den ogsaa med største Lethed kunne erholdes ved i (19) at indføre de dertil sigtende Ændringer, som vi nu gaae over til at udvikle.

§ 14.

I Analogie med Betegnelserne $\varDelta_2$ og θ_2 ville vi ogsaa indføre en særlig Betegnelse for Azimuthernes Differents, eller rettere for Størrelsen: $z + 180° - z_2$, som vi sætte $= \zeta_2$, idet vi tillige i det Følgende udtrykkeligt fastholde, at $\varDelta_2$, θ_2 og ζ_2 vedblivende skulle angive de i foregaaende § anvendte approximative Værdier, der fremkomme ved Udførelsen af den sphæriske Beregning med Størrelserne λ, z og K som givne. For at bestemme de Correctioner, som svare til Ombytningen af K med K_2, kan man for et Øieblik tænke sig enhver af de tre 1ste Ordens Størrelser: $\varDelta_2$, θ_2 og ζ_2 udviklet i Række efter stigende Potentser af K. Det er da klart, at disse Størrelsers corrigerede Værdier fremstilles ved de samme Rækker, naar man overalt sætter K_2 for K, men da Forskjellen mellen K_2 og K er af 4de Orden, er det endvidere klart, at man kun behøver at foretage Ombytningen i Rækkernes 1ste Led, medens det er ligegyldigt om man i de paafølgende sætter K eller K_2, eftersom den heraf flydende Forandring kun er af 5te eller af høiere Orden. Sætter man nu i samtlige Rækker: K_2, $K_2 K$, $K_2 K^2$ og $K_2 K^3$ istedetfor respective: K, K^2, K^3 og K^4, saa er det indlysende, at de corrigerede Værdier i denne Form kunne frembringes ved en simpel Multiplication med Forholdet: $\frac{K_2}{K}$, eller, ifølge (14), med Størrelsen: $1 + \frac{1}{6} e^2 \left(\frac{K}{N}\right)^2 \cos^2 \lambda \cos^2 z$. Denne Factor kan skrives noget simplere, naar det bemærkes, at den sphæriske Triangel $P_2 B_2 A$ giver Ligningen:

$$\sin\left(\lambda + \varDelta_2 \frac{K_2}{K}\right) = \sin \lambda \cos \frac{K_2}{N} - \cos \lambda \sin \frac{K_2}{N} \cos z,$$

hvoraf, naar kun Led af 1ste Orden bevares:

$$\varDelta_2 = -\frac{K}{N} \cos z,$$

altsaa:

$$\frac{K_2}{K} = 1 + \tfrac{1}{6} e^2 \varDelta_2^2 \cos^2 \lambda.$$

Indtil 4 Ordens Leddene incl. erholdes da følgende strengt nøiagtige Ligninger:

$$\theta \;=\; \theta_2 (1 + \tfrac{1}{6} e^2 \varDelta_2^2 \cos^2 \lambda)$$
$$L_2 = N\varDelta_2 (1 + \tfrac{1}{6} e^2 \varDelta_2^2 \cos^2 \lambda)$$
$$z_1 \;=\; z + 180^\circ - \zeta_2 (1 + \tfrac{1}{6} e^2 \varDelta_2^2 \cos^2 \lambda) - \delta .$$

Den anden af disse giver nu atter i Henhold til (15)

$$L = N\varDelta_2 \; (1 + \tfrac{1}{6} e^2 \varDelta_2^2 \cos^2 \lambda) - \tfrac{1}{6} e^2 \left(\frac{L_2}{N}\right)^2 L_2 \cos^2 \lambda$$

eller udviklet, idet man for L_2 med Bevarelse af samme Nøiagtighed kan indføre Værdien $N\varDelta_2$,

$$L = N\varDelta_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Begge Rettelser compensere saaledes fuldstændigt hinanden, og man kommer da til det høist mærkelige Resultat, at den umiddelbart paa Kuglen ved Hjælp af K beregnede Parallelafstand er indtil Led af 4de Orden incl. nøiagtigt sammenfaldende med den tilsvarende paa Sphæroiden.

Af (20) i Forbindelse med (18) bestemmes nu endeligt $\varDelta$ ved Ligningen:

$$\varDelta = \varDelta_2 \frac{N}{M_m} (1 - \tfrac{1}{8} e^2 \varDelta_2^2 \cos 2\lambda) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

idet vi uden at formindske Nöiagtigheden paa høire Side have ombyttet $\varDelta$ med $\varDelta_2$.

Vil man ogsaa for Azimuthet bevare alle Leddene af 4de Orden, hvad der aabenbart kun kan have en reen theoretisk Interesse, saa behøves hertil en Udvikling af δ med en indtil denne Grændse gaaende Nøiagtighed. Men Ligningen (10) giver ved Indførelse af Værdien $\dfrac{K}{2[R_1]}$ for h:

$$\delta = -\tfrac{1}{2} \psi \sin z_1 \left\{ \frac{K}{[R_1]} - \psi \cos z_1 \right\},$$

hvor Klammerstørrelsen kun behøver at udvikles indtil Led af 2den Orden incl. Man kan saaledes ombytte $\dfrac{1}{[R_1]}$ med $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{N_1} (1 + e^2 \cos^2 \lambda_1 \cos^2 z_1)$, og for ψ indføre den tidligere fundne Værdie: $e^2 \Delta \cos\lambda \cos\lambda_1 = e^2 \frac{K}{N_1} \cos\lambda \cos\lambda_1 \cos z_1$. Altsaa:

$$\delta = -\tfrac{1}{2}\psi \sin z_1 \left\{ \frac{K}{N_1} + e^2 \frac{K}{N_1} \cos^2\lambda_1 \cos^2 z_1 - e^2 \frac{K}{N_1} \cos\lambda \cos\lambda_1 \cos^2 z_1 \right\},$$

men da her atter $\cos\lambda$ kan ombyttes med $\cos\lambda_1$ erholdes:

$$\delta = -\tfrac{1}{2}\psi \,.\, \frac{K}{N_1} \sin z_1 \,.$$

For at bevare Leddene af 4de Orden maa i dette Udtryk ψ bestemmes nøiagtigt indtil 3die Orden incl. og Factoren: $\frac{K}{N_1} \sin z_1$ indtil 2den Orden incl. Den sphæriske Triangel $P_2 B_2 A$ giver imidlertid:

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{K_2}{N}\right) \cdot \frac{\sin z}{\cos\lambda_2},$$

som ogsaa med en Nøiagtighed indtil Led af 2den Orden incl. kan skrives: $\sin\theta = \sin\left(\frac{K}{N}\right) \frac{\sin z}{\cos\lambda_1}$,

hvoraf følger, at man ved at betragte B som Udgangspunkt og benytte Kuglen med Radius N_1 paa lignende Maade vil have:

$$\sin(-\theta) = \sin\left(\frac{K}{N_1}\right) \frac{\sin z_1}{\cos\lambda},$$

eller indtil Led af 2den Orden incl.: $\theta = -\frac{K}{N_1} \frac{\sin z_1}{\cos\lambda}$. Da Udtrykket: $\psi = \Delta - \Delta_2$ er fuldkomment skarpt indtil Led af 3die Orden incl., faaer man da endelig:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\psi \,.\, \theta \cos\lambda = \tfrac{1}{2}(\Delta - \Delta_2)\,\theta \cos\lambda \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Men denne Værdie er identisk med den tidligere i (19) anvendte, og der fremkommer saaledes paany et meget mærkeligt Resultat med Hensyn til disse Formlers Nøiagtighed, der viser sig at være langt større end det ved deres Udvikling forudsattes.

§ 15.

For at give en samlet Udsigt over den hele Regning, som fordres ved Problemets fuldstændige Løsning med Bevarelse af samtlige Led af 4de Orden, skulle vi her nedskrive alle Formlerne, idet vi medtage de bekjendte sphæriske saaledes omdannede, som *Gauss* har fremstillet dem i »Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodaesie« p. 31-32.

Af de givne: λ, z og K i Forbindelse med Udgangspunktets Normal N bestemmes først:

$$r = \frac{K}{\varrho N}; \quad s_0 = r \cos z; \quad v = r \sin z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

og dernæst s ved:

$$\log s = \log s_0 + 4crr - 4cs_0 s_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

idet man her med ϱ betegner Buelængden for eet Secund i Cirkelen med Eenheden til Radius, eller Størrelsen $\frac{\pi}{648000}$, og med c det constante Product, der fremstaaer ved at multiplicere de briggiske Logarithmers Modulus med $\frac{1}{12}\varrho\varrho$.

Man søger nu θ_0 og t_0 ved Hjælp af Ligningerne:

$$\theta_0 = \frac{v}{\cos(\lambda - s)}; \quad t_0 = v \operatorname{tang}(\lambda - s) \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

og bestemmer endelig Størrelserne θ_2, t, σ og τ ved:

$$\left.\begin{aligned} \log\theta_2 &= \log\theta_0 - 2cs_0 s_0 - 4ct_0 t_0 \\ \log t &= \log t_0 - 2crr - 4ct_0 t_0 \\ \log\sigma &= \log(\tfrac{1}{2}\varrho v t_0) - crr - 3cs_0 s_0 - 3ct_0 t_0 \\ \log\tau &= \log(\tfrac{1}{2}\varrho v s_0) + 5crr - 6cs_0 s_0 \end{aligned}\right\} \ldots (26)$$

hvoraf θ_2, $\varDelta_2$ og ζ_2 erholdes udtrykte i Secunder, idet man tillige har Ligningerne:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta_2 &= -(s + \sigma) \\ \zeta_2 &= +(t + \tau) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Ifølge de i sidste § udviklede Formler har man da endelig:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= \varDelta_2 \frac{N}{M_m}(1 - \tfrac{1}{8}\varrho^2 e^2 \varDelta_2^2 \cos 2\lambda) \\ \theta &= \theta_2 (1 + \tfrac{1}{6}\varrho^2 e^2 \varDelta_2^2 \cos^2\lambda) \\ z_1 &= z + 180^\circ - \zeta_2 (1 + \tfrac{1}{6}\varrho^2 e^2 \varDelta_2^2 \cos^2\lambda) - \tfrac{1}{2}\varrho(\varDelta - \varDelta_2)\theta\cos\lambda \end{aligned}\right\} (28)$$

hvor $\varDelta$, θ og $z_1 - (z + 180^\circ)$ ligeledes forudsættes angivne i Secunder.

Det Eiendommelige ved den her anførte sphæriske Løsning, der giver en i høi Grad simpel Regning, fremtræder især ved Formlerne (24) og (26), hvor de søgte Logarithmer bestemmes af tidligere fundne ved en Tilføielse af forholdsviis ubetydelige Correctioner. Skulle disse strax fremtræde som Eenheder af Logarithmernes 7de Decimal, maa man addere Tallet 7 til Logarithmen af c, eller sætte:

$$\log c = 4{,}92975\,(-10)$$

idet Rettelserne bestemmes med mere end tilstrækkelig Nøiagtighed ved Anvendelsen af femziffrede Logarithmer.

I Formlerne (28) vil man naturligviis ved Regningens Udførelse anvende Logarithmerne af de tvende Factorer: $\frac{N}{M_m}(1 - \frac{1}{8}\varrho^2 e^2 \Delta_2^2 \cos 2\lambda)$ og $(1 + \frac{1}{6}\varrho^2 e^2 \Delta_2^2 \cos^2\lambda)$, hvilke fremstilles ved: $\log \frac{N}{M_m} - \frac{3}{2} c e^2 \Delta_2^2 \cos 2\lambda$ og $+ 2 c e^2 \Delta_2^2 \cos^2 \lambda$.

§ 16.

Gauss har, til nærmere Belysning af selve den numeriske Regning, udførligt gjennemgaaet denne i et særligt valgt Tilfælde, hvor Forholdene fremtræde saa ugunstige som muligt, idet han blandt alle den hannoveranske Gradmaalings Triangelsider har udsøgt den allerstørste, hvis Udstrækning, paa Grund af ganske eiendommelige Localiteter, langt overskrider de sædvanlige Grændser. Det er Fastlæggelsen af Punktet *Inselsberg* ved et directe Sigte fra det mere end 14 Mile bortfjernede *Brocken*, der gjøres til Gjenstand for Beregningen, som vi til Sammenligning nu ogsaa skulle udføre ved Hjælp af Formlerne (23) til (28).

De givne Størrelser, hvorved Længde-Eenheden er den saakaldte gaussi'ske Meter, ere følgende:

$$\lambda = 51^\circ 48' 1'',9294; \quad z = 5^\circ 42' 21'',7699; \quad \log K = 5{,}0251757,$$

og man har tillige: $\log \frac{1}{\varrho N} = 8{,}5089219.$

Heraf findes først ved Hjælp af (23):

$$\log r = 3{,}5340976$$

$$\log\cos z = 9{,}9978427\,;\quad \log\sin z = 8{,}9974946$$

$$\log s_0 = 3{,}5319403\,;\quad \log v = 2{,}5315922$$

og dernæst ifølge (24):

$$\log c\,r\,r = 1{,}99795\,;\quad c\,r\,r = 99{,}529$$

$$\log c\,s_0\,s_0 = 1{,}99363\,;\quad c\,s_0\,s_0 = 98{,}544$$

$$4\,c\,r\,r - 4\,c\,s_0\,s_0 = +\,4.$$

$$\log s = 3{,}5319407\,;\quad s = +\,3403'',6172\,;$$

altsaa:

$$\lambda - s = 50^\circ\,51'\,18'',3122$$

$$\log\cos(\lambda - s) = 9{,}8002248\,;\quad \log\operatorname{tang}(\lambda - s) = 0{,}0893860.$$

Ligningerne (25) give nu:

$$\log\theta_0 = 2{,}7313674\,;\quad \log t_0 = 2{,}6209782$$

og ligeledes faaer man:

$$\log(\tfrac{1}{2}\,\varrho\,v\,s_0) = 0{,}4480774\,;\quad \log(\tfrac{1}{2}\,\varrho\,v\,t_0) = 9{,}5371153\,,$$

idet man tillige har:

$$\log c\,t_0\,t_0 = 0{,}17171\,;\quad c\,t_0\,t_0 = 1{,}485.$$

De logarithmiske Correctioner, der indtræde i Ligningerne (26), findes nu at være respective: —203; —205; —400; —94. Hvoraf da endelig ifølge (26):

$$\log\theta_2 = 2{,}7313471\,;\quad \log t = 2{,}6209577$$

$$\log\sigma = 9{,}5370753\,;\quad \log\tau = 0{,}4480680.$$

Uagtet det for Bestemmelsen af de endelige Værdier er overflødigt, skulle vi dog allerede her opslaae samtlige Størrelser og saaledes Skridt for Skridt følge den ved (27) og (28) angivne Vei, der fuldstændigt oplyser Betydningen af de successive Rettelser.

Man erholder saaledes:

$$\sigma = +\,0'',3444\,;\quad t = +\,417'',78971\,;\quad \tau = +\,2''80587.$$

Altsaa:

$$\theta_2 = +\;538'',7001$$

$$\varDelta_2 = -3403'',9616$$

$$\zeta_2 = +\;420'',5956\,;$$

men ifølge (28) blive disse Størrelser at multiplicere med Factorer, hvis Logarithmer ere respective:

$$\log \frac{N}{M_m} - \tfrac{3}{2} c e^2 \Delta_2^2 \cos 2\lambda \text{ og } 2 c e^2 \Delta_2^2 \cos^2 \lambda,$$

og i nærværende Tilfælde haves:

$$- \tfrac{3}{2} c e^2 \Delta_2^2 \cos 2\lambda = 0{,}00000002$$
$$+ 2 c e^2 \Delta_2^2 \cos^2 \lambda = 0{,}00000005.$$

Den første Correction falder saaledes ganske bort, den sidste, der netop overstiger Halvdelen af en Eenhed i syvende Decimal, vil derimod forøge det sidste Ziffer i $\log \theta_2$ og $\log t$ med en Eenhed, medens det aabenbart er overflødigt at foretage denne Forandring i $\log \tau$. Da man endvidere har $\log \dfrac{1}{\varrho M_m} = 8{,}5100716$, altsaa: $\log \dfrac{N}{M_m} = 0{,}0011497$, bliver

$$\log \theta = 2{,}7313472; \quad \log \Delta_2 \frac{N}{M_m} = 3{,}5331344$$

og den corrigerede Værdie for

$$t = +417'',78981 \text{ og for } \zeta_2 = +420'',5957.$$

Altsaa:

$$\begin{aligned} \Delta &= -3412'',9850 \\ \theta &= +\ \ 538'',7002 \\ z_1 &= 185^\circ 42' 21'',7699 - 420'',5957 + 0'',0073 \\ &= 185^\circ 35' 21'',1815 \end{aligned}$$

idet man tillige har:

$$\tfrac{1}{2}(\Delta - \Delta_2) = -\ 4'',5117 \text{ og } \log\left(\tfrac{1}{2}\varrho(\Delta - \Delta_2)\,\theta \cos \lambda\right) = 7{,}86253.$$

Gauss finder:

$$\begin{aligned} \Delta &= -3412'',9850 \\ \theta &= +\ \ 538'',7002 \\ z_1 &= 185^\circ 35' 21'',1815 \end{aligned}$$

eller identisk de samme Værdier, hvilket, hvad Δ angaaer, kun kan være et tilfældigt Sammentræf, da syvziffrede Logarithmer ikke ved denne Størrelse kunne bestemme Eenheder af sidste Orden.

§ 17.

Uagtet den ovenfor meddeelte Løsning vistnok maa erkjendes at være simpel, saa er den dog langtfra at være den simpleste, som Problemet efter sin Natur kan tilstede. Ligesom man nemlig i det Foregaaende, ved en skarpere Opfattelse af Spørgsmaalet, har kunnet føre Opgaven tilbage fra en sphæroidisk til en sædvanlig sphærisk trigonometrisk, saaledes vil man ogsaa let ved en fortsat Overveielse bringes til at indsee, at selve den sphæriske Trigonometrie ingenlunde er at betragte som uundværlig, da de givne sphæroidiske Forhold, naar det rette Synspunkt fastholdes og alt Uvedkommende fjernes, ere saa elementære, at de væsentligste Forbindelser mellem Problemets forskjellige Størrelser lade sig behandle ved de første plan trigonometriske Sætninger, der udtrykke Relationerne mellem Hypothenusen og Catheterne i en retvinklet Triangel. Det er dette, som vi endnu til Slutning med faa Ord skulle oplyse.

For at angive den relative Beliggenhed af Punktet B mod Punktet A, er det naturligst at gjøre Brug af et sædvanligt retvinklet Coordinatsystem. Lad Tangentplanen i A være Systemets Grundplan, og lad Axerne for x og y være bestemte ved denne Plans Skjæringer med Meridianplanen og med Parallelkredsens Plan, begge for Punktet A, eller med andre Ord, lad x-Axen gaae fra Syd mod Nord og y-Axen fra Øst mod Vest gjennem Udgangspunktet. Systemets tredie Axe er da herved tillige bestemt som sammenfaldende med Normalen N, og da den tredie Coordinat, som vi betegne med u, for ethvert B ligger under Tangentplanen, ville vi ogsaa regne u positiv nedefter, medens x skal regnes positiv mod Nord og y mod Vest.

Indføres nu Cirkelen med Radius $[R]$ istedetfor den elliptiske Bue AA_1B, saa vil u, eller Perpendiculæren, der fra B nedfældes paa Tangentplanen, være umiddelbart givet ved:

$$u = 2[R]\sin^2\left(\frac{K}{2[R]}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Det Stykke T af Buens Tangent, der ligger mellem A og Fodpunktet for u, er ligeledes bestemt ved:

$$T = [R]\sin\left(\frac{K}{[R]}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

hvoraf atter: $$x = -T\cos z$$
$$y = T\sin z.$$

Det er endvidere indlysende, at Punktet x, y, u har samme Afstand fra den gjennem y-Axen gaaende Parallelplan for Breden λ, som det i selve Meridianplanen beliggende Punkt x, u. Betegnes denne Afstand med p og bemærkes det, at x og u danne respective Vinklerne λ og $90^\circ + \lambda$ med Polaraxen, eller Perpendiculæren paa den nævnte Plan, saa haves følgelig:

$$p = x\cos\lambda - u\sin\lambda = -(T\cos\lambda\cos z + u\sin\lambda) \quad . \; . \; (31)$$

Men herved er allerede Problemet løst, hvad Bestemmelsen af Brede og Længde angaaer, da man aabenbart tillige har:

$$(1 - e^2)(N_1\sin\lambda_1 - N\sin\lambda) = p,$$

hvorved Breden er fundet, medens Ligningen:

$$y = N_1\cos\lambda_1\sin\theta, \quad \text{eller:} \quad \sin\theta = \frac{T\sin z}{N_1\cos\lambda_1}$$

dernæst bestemmer Længdedifferentsen θ. Ved at betragte Punktet B som Udgangspunkt vil man endelig ogsaa kunne benytte enhver af disse sidste Ligninger til at finde selve Azimuthet z_1. Ligningen for Længdedifferentsen giver saaledes:

$$\sin\theta_1 = \frac{T_1\sin z_1}{N\cos\lambda} = -\sin\theta = -\frac{T\sin z}{N_1\cos\lambda_1}$$

$$\text{altsaa:} \quad \sin z_1 = -\frac{TN\cos\lambda}{T_1 N_1\cos\lambda_1}\sin z,$$

men her synes det dog bedre at gjøre Brug af den sphæriske Triangel, som dannes af Polaraxen i Forbindelse med Linierne FA og FB. Denne Triangel, hvor Vinkelen θ ligger indesluttet mellem Siderne $(90^\circ - \lambda)$ og $(90^\circ - (\lambda_1 - \psi))$, medens de tvende andre Vinkler ere $(180^\circ - z)$ og $(z_1 + \delta - 180^\circ)$, giver nemlig umiddelbart:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z_1 - z + \delta) = \cot\tfrac{1}{2}\theta \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda_1 - \psi - \lambda)}{\sin\frac{1}{2}(\lambda_1 - \psi + \lambda)},$$

som ved Indførelsen af ζ, bestemt ved: $z_1 = z + 180^\circ - \zeta$, kan omskrives til:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\zeta - \delta) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\lambda_1 - \psi + \lambda)}{\cos\frac{1}{2}(\lambda_1 - \psi - \lambda)}.$$

Naar det bemærkes, at δ, ψ og θ ere Størrelser af respective 3die, 2den og 1ste Orden, vil Rækkeudviklingen med Bevarelse af Led indtil 4de Orden incl. give Ligningen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta - \frac{\tfrac{1}{2}\delta}{\cos^2(\tfrac{1}{2}\zeta)} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \, . \, \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda)}{\cos\tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)} - \frac{\tfrac{1}{2}\psi\cos\lambda\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta}{\cos^2(\tfrac{1}{2}\lambda_1-\tfrac{1}{2}\lambda)},$$

som atter, da ζ og $\lambda_1 - \lambda$ ere Størrelser af 1ste Orden, kan omskrives til:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta - \tfrac{1}{2}\delta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda)}{\cos\tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)} - \tfrac{1}{4}\psi \, . \, \theta\cos\lambda\,,$$

eller, da δ ifølge (22) indtil Led af 4de Orden incl. er ligestor med: $\tfrac{1}{2}\psi\,\theta\cos\lambda$,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda)}{\cos\tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)}\,,$$

hvilken Ligning, der ganske stemmer med det saakaldte Dalby'ske Theorem, ogsaa er bleven udviklet af Puissant, men af ham kun viist at gjælde indtil Led af 3die Orden incl.

Den fuldstændige Løsning af Problemet er saaledes givet ved følgende Formler:

$$(1-e^2)(N_1\sin\lambda_1 - N\sin\lambda) = p = -(T\cos\lambda\cos z + u\sin\lambda) \;.\;.\; (32)$$

$$\sin\theta = \frac{T\sin z}{N_1\cos\lambda_1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (33)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \, . \, \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda)}{\cos\tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)} \\ z_1 &= z + 180^\circ - \zeta \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\; (34)$$

af hvilke (32) dog ikke umiddelbart kan anvendes til beqvem Beregning af λ_1 eller af $\varDelta$. Derimod er det indlysende, at en overordentlig simpel Løsning af Bredeproblemet vilde fremstaae ved at gjøre Brug af en særegen Tavle, der for Argumentet λ gav Værdierne af Functionen: $P = (1-e^2)(N\sin\lambda - N_0\sin\lambda_0)$, hvor λ_0 er en vilkaarlig Tavlen begrændsende Udgangsbrede, hvis Normal er N_0. Man vilde nemlig stedse kjende den Værdie af P, der svarede til Breden for Punktet A, og naar hertil adderedes p, bestemt ved (31), vilde man da ogsaa umiddelbart og med al ønskelig Skarphed kunne opslaae den tilsvarende Værdie λ_1. Skulle Interpolationerne gaae let fra

Haanden, maa denne Hjælpetavle imidlertid give P fra 10 til 10 Secunder, og den bliver saaledes af et ikke ganske ubetydeligt Omfang. I Regelen vil man derfor vistnok ogsaa foretrække at omdanne (32) ved en Udvikling i Række, ordnet efter stigende Potentser af K, ligesom det overhovedet vel stedse er ved Rækkeudviklingen, at saavel de tidligere, som de i nærværende Paragraph udledede Formler omdannes til de for Regningen beqvemmeste Former. Men Behandlingen af denne sidste, for den praktiske Anvendelse ingenlunde uvæsentlige Deel af Problemet, hvorved samtlige Størrelsers Logarithmer søges udtrykte paa den simpleste Maade, skulle vi imidlertid forbeholde til en senere Meddelelse, ved hvilken det da ogsaa skal vises, at $[R]$ stedse er bestemt ved Ligningen:

$$\frac{1}{[R]} = \frac{1}{R}\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \frac{K}{R} \sin 2\lambda \cos z\right).$$

I Mødet var fremlagt:

Fra Academie der Wissenschaft i Wien.

Sitzungsberichte math. naturw. Classe, Band XXIII, Heft 2, Band XXIV, Heft 1-3, Band XXV, Heft 1-2, Band XXVI, Heft 1, Band XXVII, Heft 1, Band XXVIII, Nr. 1-5. Wien 1857-58.

— phil. histor. Classe, Band XXIII, Heft 1-5, Band XXIV, Heft 1-2, Band XXV, Heft 1-3. Wien 1857-58.

Denkschriften mathem. naturw. Classe XII & XIII Band. Wien 1856-57.

— phil. histor. Classe, Band VIII. Wien 1857.

Archiv für Kunde österreichischer Geschichts Quellen, Band XVIII, Heft 2. Wien 1857.

Fontes Rerum Austriacarum; österreichische Geschichts Quellen Band XIV, III Theil, Band XV. 1 Theil. Wien 1857.